Entrée en terminale – Spécialité maths

Les exercices qui suivent font appel à des notions essentielles du cours de 1e qu'il est important de bien maitriser en entrant en terminale. Il est conseillé de reprendre le ***cours*** *avant de les traiter en faisant des fiches sur certains chapitres (formules de dérivées,). Les différentes parties sont classées par ordre de travail (à répartir pendant les vacances, au minimum à partir du 15 août). Refaites les contrôles communs et travaillez le Python.*

Partie 1 – Polynôme du second degré

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 5$

a) Déterminer la forme canonique de f.
b) En déduire l'extremum (maximum ou minimum) de f et la valeur de x pour lequel il est atteint.
c) Mêmes questions avec $g(x) = -2x^2 + 8x - 13$

Exercice 2 :

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes puis donner leur tableau de variation :

a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$ b) $f(x) = -3(x+1)^2 - 5$ c) $f(x) = x(x-8)$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $(E_1) :\ 6x^2 - 7x - 3 = 0$ b) $(E_2) :\ x^2 - 19x - 216 = 0$ c) $(E_3) :\ x^4 - x^2 - 2 = 0$

$d)(I_1) : 8\,x^2 - 2x - 3 < 0$ e) (I_2): $\frac{x^2-x-20}{3x^2-20x-7} \geq 0$

Exercice 4 :

m est un réel fixé différent de $\frac{3}{2}$. P_m est un polynôme défini par $P_m(x) = (2m-3)\,x^2 - 2mx - 1$.

1) Calculer le discriminant du polynôme P_m.
2) Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ n'admet-elle qu'une solution ?
3) Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ n'admet-elle aucune solution dans $\mathbb{R}$?
4) Pour quelles valeurs de m a-t-on $P_m(x) > 0$ pour tout réel x ?

Partie 2 – Dérivation

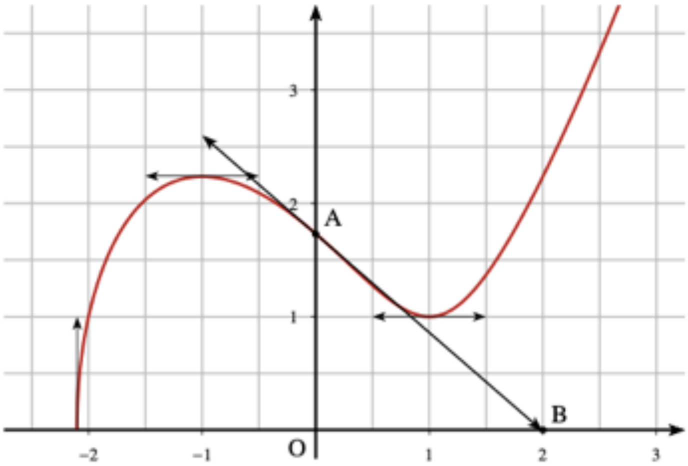
Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et un réel h non nul. On désigne par Cf sa courbe représentative.

1) Vérifier que $f(-3+h) = 3h^2 - 20h + 34$
2) En déduire que le taux de variation de f entre -3 et $-3+h$ est $\tau(x) = 3h - 20$
3) La fonction est-elle dérivable en -3 ? Si oui, préciser le nombre dérivé.
4) Déterminer l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse -3.

Exercice 6 :

Soit la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2,1\,;+\infty[$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(1,73\,;\,0)$ passe par le point $B(2\,;\,0)$.



Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			

Exercice 7 :

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire son domaine de définition, de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	$f_2(x) = \sqrt{x}(2x+1)$	$f_3(x) = (2x-3)(\,x^2 + 4x - 1)$
$f_4(x) = \frac{x-5}{x+2}$	$f_5(x) = \frac{2x+5}{x^2+x+3}$	$f_6(x) = \frac{5}{x^2-1}$
$f_7(x) = \sqrt{2-3x}$	$f_8(x) = (-5x+4)^2$	

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-4x+7}{x-1}$. On désigne par Cf sa courbe représentative.

1) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
2) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3) Déterminer l'équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 2.
4) Existe-t-il des tangentes à Cf parallèles à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$? Si oui, en quels points ?

Partie 3 – Exponentielle

Exercice 9 :

Simplifier les écritures suivantes :

$(e^x)^3 e^{-2x}$	$\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$	$e^{-x}e^2$	$\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x}$	$\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$	$\frac{(e^{-3x})^2 e^{5x}}{e^{-x}}$

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $(E_1): e^{3-x} = 1$ b) $(E_2): e^{2x^2+3} = e^{7x}$ c) $(E_3): 2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ d) $(E_4): e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$

$e)$ $(E_5): e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ (changer de variable)

$f)(I_1): (e^x)^3 \leq e^{x-2}$ g) $(I_2): e^x > \frac{1}{e^x}$ h) $(I_3): (e^x - 1)e^x > e^x - 1$

$Montrer\ que$: $3e^{2x} + e^x - 4 = (e^x - 1)(3e^x + 4)$. En déduire le signe de $3e^{2x} + e^x - 4$ en fonction de x.

Exercice 11 :
Déterminer les dérivées puis en déduire le sens de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x^2 - 2x)\, e^x$ b) $g(x) = \frac{1}{x} e^x$ c) $h(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ d) $k(x) = e^{-2x+1}$

$e)$ $m(x) = xe^{2x^2-3}$

Exercice 12 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -3 < f(x) < 2$.
Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 2.

Exercice 13 :

1) Déterminer la nature de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{3n}$. Indiquer sa raison et son premier terme.
2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^n$.
   a. Montrer que (v_n) est géométrique.
   b. Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + \cdots .. + v_{50}$

Exercice 14 :

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000℃. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (˚C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inferieure à 70˚ C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.
On note *t* le temps, **en heure**, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant *t* est donnée par la fonction *f* définie, pour tout nombre réel *t* positif, par : $f(t) = ae^{\frac{1}{5}} + b$ où a et b sont deux nombres réels.
On admet que *f* vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$

1) Déterminer les valeurs de *a* et *b* sachant qu'initialement, la température du four est de 1000℃.
2) Étudier les variations de *f* sur [0 ; +∞[. En déduire son tableau de variations.
3) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie 4 - Les suites

Exercice 15 :

Calculer les 3 premières valeurs et conjecturer à l'aide d'une calculatrice, le sens de variation de la suite.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2 + 3n - 5$

$b)$ $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - 7 \end{cases}$

Les suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? justifier

Exercice 16 :
Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n).

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 2 \end{cases}$

Exercice 17 :
Dans chaque cas, exprimer le terme u_{n+1}en fonction de n, puis en fonction de u_n. Préciser alors la nature des suites.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 5$

$b)$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4-7n}{5}$

$c)$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n}{3^{2n}}$

Exercice 18 :

(u_n) est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases}$

1) Calculer le 1er terme u_0 et la raison r.
2) Calculer alors $S = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{30}$

Exercice 19 :
Étudier le sens de variation des suites numériques (u_n) définies ci-dessous :

a) $u_n = n^2 - 5n + 1$

$b)$ $u_n = n + \frac{1}{n+1}$

$c)$ $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$

Exercice 20 :
Calculer les sommes :

a) $S = 10 + 12 + 14 + \cdots . + 80$ b) $S = 1 + 4 + 7 + \cdots + 364$ c) $S = \frac{3^4}{5} + \frac{3^5}{5} + \cdots + \frac{3^{12}}{5}$

Exercice 21 :
(u_n) est une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$

a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n+1}{u_n}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
b) En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n.

Exercice 22 :
Une balle est lâchée d'une hauteur de 3 m au-dessus du sol. Elle touche le sol et rebondit. A chaque rebond, elle perd 25% de sa hauteur précédente. On modélise la hauteur de la balle par une suite (h_n) où h_n désigne la hauteur maximale de la balle, en mètres, après le n-ième rebond.

a) Calculer h_0, h_1, h_2
b) Donner, en justifiant, la nature de (h_n) et préciser ses éléments caractéristiques.
c) Donner la hauteur, arrondie au cm, de la balle après 6 rebonds.
d) La fonction « seuil » est définie en Python. Compléter cet algorithme pour que cette fonction renvoie le nombre de rebonds à partir duquel la hauteur maximale de la balle sera inférieure ou égale à 10 cm.

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while .......:
        h = ......
        n=n+1
    return n
```

Partie 5 – Trigonométrie

Exercice 23:
Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels $\frac{-22\pi}{3}$ et $\frac{47\pi}{4}$. Indiquer leur cosinus et leur sinus.

Exercice 24:
Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(6\pi - x)$$

Exercice 25:
Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) : $2sin^2(x) = 1$ et l'inéquation : (I) : $2\cos(x) > \sqrt{2}$

Partie 6 – Géométrie

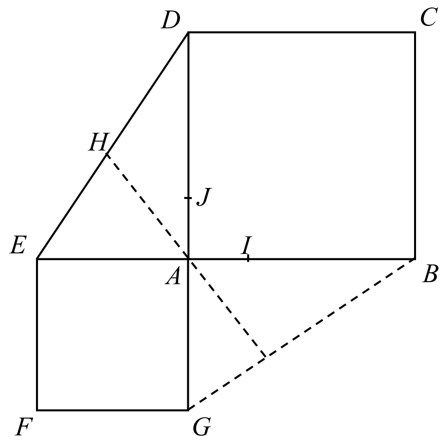
Exercice 26 :

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point de [AB] tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et N un point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure
2) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}$ de deux manières différentes déterminer la mesure exacte de l'angle $\widehat{MDN}$. On pourra introduire le repère (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$).

Exercice 27 :
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Soient $A(-1; 4), B(2; 2) et\ C(1; 5)$. Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 28 :



ABCD est un carré de côté *a*.
AEFG est un carré de côté *b*, tel que $A \in [DG]$ et $A \in [BE]$.
Le point *H* est le milieu du segment $[DE]$.
Le but de l'exercice est de prouver que les droites (AH) et (BG) sont perpendiculaires par deux méthodes.

1) ***sans utiliser les coordonnées :***

a)Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$
b) Calculer en le développant, le produit scalaire :
$$\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right)$$
c) En déduire que (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

2)à l'aide des coordonnées :

On a placé sur le schéma les points *I* et *J* tels que $AI = 1$ et $AJ = 1$; on considère alors le repère $(A; I, J)$.

a) Déterminer en fonction de *a* et *b*, les coordonnées des points *E*, *D*, *B* et *G*.
b) Montrer (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

Exercice 29 :
Soit le triangle ABC tel que BC = 7 cm, AC = 3,7 cm et AB=5,3 cm.
Calculer la valeur exacte de $cos\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approcher de $\widehat{BAC}$ à 0,1° près.
Calculer la valeur exacte de $cos\widehat{ABC}$ puis donner une valeur approcher de $\widehat{ABC}$ à 0,1° près.

Exercice 30 :

1) Soit A et B deux points du plan tels que AB=6 cm et I le milieu de $[AB]$.

Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 12$
Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = -5$
Montrer que $MA^2 + MB^2 = 26$ équivaut à $MI^2 = 4$. En déduire l'ensemble (E_3) des points M.

2) Soit le triangle ABC et I le milieu de $[BC]$. Déterminer l'ensemble (E_4) des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 31 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$). Soient $A(3;4), B(1;-1) et\ C(6;-2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (AB).
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point C et parallèle à la droite (AB).
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC).
4) Déterminer une équation cartésienne du cercle C_1 de diamètre $[BA]$.
5) Déterminer une équation de la tangente T cercle C_1 en B.

Exercice 32 :

1) On considère l'équation $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$.

Cette équation est-elle celle d'un cercle ? Si oui, en préciser le centre et le rayon.

2) On considère l'équation $(E): x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = 0$

Pour quelles valeurs de a cette équation est-elle celle d'un cercle ? Préciser alors son centre et son rayon.

Partie 7 – Probabilités

Exercice 33:

Deux urnes contiennent chacune 5 boules. L'urne n°1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne n°2 contient une boule blanche et 4 boules noires. On lance un dé équilibré à 6 faces notées de 1 à 6. Si le dé est 6 on tire une boule dans l'urne n°1, sinon on tire une boule dans l'urne n°2. On gagne lorsque l'on obtient une boule blanche. On note les évènements :

« S » : le résultat du dé est un 6,

« B » : on tire une boule blanche.

1) Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités suivantes : $\mathrm{p}(S), \mathrm{p}(\bar{S}), p_S(B), p_{\bar{S}}(\bar{B})$
2) Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.
3) Montrer que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à $\frac{7}{30}$.
4) Un jour a gagné. Quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne n°1 ?
5) Les événement B et S sont-ils indépendants ?

Exercice 34 :

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous. On sait que : $E(X) = 1{,}4$. Calculer a et b. En déduire la variance et l'écart-type.

x_i	-5	-2	8
$p(X = x_i)$	$0{,}2$	a	b

Exercice 35 :

Après avoir misé 2€, on lance deux dés équilibrés. Si la somme des résultats obtenus est supérieure ou égale à 10, on gagne 10€, sinon on ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en €. Déterminer la loi de probabilité de G. calculer $E(G)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 36:

Un tireur participe à un concours de tir à l'arc et atteint sa cible neuf fois sur dix. Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 euros sinon il perd 20 euros. On suppose que les tirs sont indépendants.

1) Quelle est la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible ?
2) On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des 5 tires.
    a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
    b) Donner la loi de probabilité de Y
    c) Quel est le gain moyen du tireur ? Est-ce intéressant pour lui ? Justifier.
    d) Calculer la variance et l'écart-type .

Exercice 37:

Un restaurateur propose deux formules au déjeuner : le menu express à 12€ et le menu du jour à 15€. La bière est en supplément à 2€. 60% des clients choisissent le menu express et 70 % prennent une bière. De plus 40% des clients choisissant le menu du jour prennent une bière.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Bière en supplément	Pas de bière	Total
Menu express			60
Menu du jour			
Total			

On choisit au hasard un client de ce restaurant et on note D la variable aléatoire représentant sa dépense en €.

2) Déterminer la loi de probabilité de D.
3) Calculer l'espérance de D et interpréter le résultat obtenu.
4) Le restaurateur fait 200 repas par déjeuner. Quelle recette peut-il espérer ?